بحث تاثير تغير معاملات دالة الهدف على الحل الامثل مع تطبيق عملي (باستخدام البرمجة المعلمية)

سميرة خليل ابراهيم
قسم الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد. بغداد- العراق.

الخلاصة

تعتبرالبرمجة المعلمية نوع من تحليل الحساسية , حيث اهتم هذا البحث بدراسة تأثير التغيرات الحاصلة في معاملات دالة الهدف على الحل الامثل, وقد تم تحديد حدود المعلمة ($-5 \leq \theta \leq 50$) , وكانت النتيجة ان قيمة دالة الهدف تساوي صفر عندما ($\theta = -5$), وان متغيرات القرار غير اساسية وان اعلى قيمة لدالة الهدف عندما ($\theta = 50$) ومتغيرات القرار اصبحت اساسية, اي ان كلما زادت قيمة المعلمة θ زادت قيمة دالة الهدف ايضا.

SEARCH EFFECT CHANGE THE OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS TO THE OPTIMAL SOLUTION WITH PRACTICAL APPLICATION (USE THE PARAMETRIC PROGRAMMING)

Sameerh Khaleel Ibrahim
Department of Statistic, College of Administration &Economy, University of Baghdad. Baghdad - Iraq.

Abstract

The parametric programming considered as type of sensitivity analysis. This paper is concern on the study the effect of the variations objective function coefficients on the optimal solution. Of the parameter value ($-5 \leq \theta \leq 50$) is taken the result, of the objective function equal zero and the decision variables are non basic, when the parameter ($\theta = -5$).The objective function have value maximum when the parameter ($\theta = 50$) and the decision variables are become basic. Whenever the parameter value increase, the objective function value increase too.

المقدمة

تعتبر البرمجة المعلمية احدى الاساليب الرياضية المهمة التي تتناول تحليل البرمجة الخطية عند حصول التغيرات الانية لجميع معاملات دالة الهدف (نطاق البحث) او التغيرات الحاصلة في معاملات الطرف الايمن للقيود كما ان هناك حالة اخرى اكثر تعقيدا وهي الحالة التي تتناول الحالتين معا (حالة التغيرات الانية الحاصلة لمعاملات دالة الهدف والطرف الايمن للقيود) , حيث تناول الباحثان عام 1954(T.L Saaty & S.I Gass , Part1) [1] دراسة مسألة البرمجة المعلمية بهدف تحديد قيم المتغيرات (X_j) وقيم المعلمات (λ) المرافقة لها , كما اوضح الباحثان عام 1955 (T.L Saaty & S.I Gass , Part2) [2] لحالة تغير (n) من معاملات دالة الهدف مع التاكيد على حالة تغيير معاملين من معاملات دالة الهدف المعلمية.

كما استخدم الباحث(احمدعبدالقادر) 1998 البرمجة المعلمية في تخطيط الانتاج حيث قام بدراسة التغيرات التي تطرأ على الطرف الايمن من القيود لنموذج البرمجة الخطية[3] وقد تناول الباحثون عام 2008 (Jones C.N. and Kerrigran E.C. and Maciejowski J.M) التقدير المتعدد الاوجه وعلاقته بالبرمجة المعلمية[4], كما تهدف البرمجة المعلمية الى دراسة التغيرات التي تحدث في الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية نتيجة التغيرات المستمرة التي تحدث في معالم النموذج المحددة مسبقا[5], حيث يعتبر نوع من انواع تحليل الحساسية [6].

هدف البحث

يهدف البحث الى معرفة تأثير التغير الحاصل في معاملات دالة الهدف على الحل الامثل والمتغيرات الاساسية لنموذج البرمجة الخطية عند استخدام البرمجة المعلمية.

الجانب النظري

يتمثل اسلوب البرمجة المعلمية في ايجاد الحل الامثل عندما($\theta=0$) حيث ان(θ) تمثل المعلمة (parameter) والتي تتغير معها المعالم المختلفة ومن ثم استخدام شرطي الامثلية والقبولية (Optimality and Feasibilit0y) وباستخدام طريقة السمبلكس يتم ايجاد حدود قيم المعلمة (θ) والتي عندها يبقى الحل مقبول وامثل. لو افترضنا ان حدود θ هي $(0,\theta_1)$ فعندما نقوم بايجاد الحل الامثل او المقبول عندما $(\theta=\theta_1)$ فاذا كان الحل غير مقبول اوامثل،نقوم بزيادة قيمةθ_1وتزيد عن θ_1, ولتكن $(\theta=\theta_2)$ نحدد حل جديد والذي يبقى امثل ومقبول من $(\theta=\theta_1)$ الى $(\theta=\theta_2)$ ،حيث ان $(\theta_2 > \theta_1)$. ومن تكرار هذه العملية سوف نحصل على حلول جديدة الى ان نصل الى قيمة لـ(θ) يكون الحل اما لايتغير او يصبح الحل غيرمحدد (Unbounded Solution).

ان صياغة نموذج البرمجة الخطية بالصيغة المعلمية لخاصة بالتغيرات الحاصلة في معاملات دالة الهدف يمكن كتابتها بالشكل التالي:-

$$\text{Min or Max } Z=\sum(c_i+c^*_i\theta)x_i$$

$$\text{S.to}$$

$$\sum a_{ij}x_j \leq = \geq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1\ 2, \ldots, n$$

حيث ان (c^*_j) هو ثابت يمثل مقدار التغير في مقدار الربح والذي يتغير بتغير قيمة المعلمة (θ)،وان (c_j) هي معاملات دالة الهدف (ربح الوحدة الواحدة من المنتجات) اما خطوات حل نموذج البرمجة المعلمية في حالة تغير معاملات دالة الهدف فهي كالاتي:-

1. يتم حل النموذج عندما ($\theta = 0$) فيكون

$${}^0X_B = {}^0B^{-1}\ P_0$$

(الحل الامثل)

$${}^0C_B\ {}^0B^{-1}\ P_j - {}^0C_j \geq 0 \qquad \forall \text{ non basic } P_j$$

2. يمكن اخذ تأثير التغير في معاملات دالة الهدف من خلال الدالة التالية :-

$${}^\theta C = {}^0C + \theta E$$

ومن المعلوم ان اي تغير في معاملات دالة الهدف يؤثرعلى قيم المعاملات ($Z_j - C_j$) وهذا يعني تأثر شرط الامثلية (Optimality).

3. اسلوب البرمجة المعلمية هو تحديد قيم (θ) المتعاقبةوالتي عندها لايتغيرالحل الامثل وهذه تسمى القيم الحرجة , علما ان قيم θ هي($-\infty \leq \theta \leq \infty$) نحصل على الحل الامثل

اولاعندما(θ= 0) وهو ${}^0X_B$ ثم نفرض $(\theta = \theta_1), (\theta = \theta_2)$ حيث ان ($\theta_1 \leq \theta_2$)، ونفترض ان الحل الامثل عندما $(\theta = \theta_1)$هو ${}^{\theta 1}X_B$ ثم يتم تحديد القيمة الحرجة الثانية وهي $(\theta = \theta_2)$, ان الحل الاساسي عندما $(\theta = \theta_1)$ وهو ${}^{\theta 1}X_B$ سيبقى امثلا عند المجال ($\theta \geq \theta_1$) اذا كانت ($Z_j - C_j \geq 0$) ولتحديد قيم ($Z^\theta_j - C^\theta_j \geq 0$) عندما ($\theta \geq \theta_1$) يكون كالاتي:-

$$C^\theta_B = C^0_B + \theta E_B$$
$$= C^0_B + \theta_1 E_B + (\theta - \theta_1)\ E_B$$
$$= C^{\theta 1}_B + (\theta - \theta_1)\ E_B$$

وبنفس الطريقة $\theta \geq \theta_1$

$$C^\theta_j = C^{\theta 1}_j + (\theta - \theta_1)\ e_j$$

$$Z^\theta_j - C^\theta_j = \{ C^{\theta 1}_B + (\theta - \theta_1)\ E_B \}B^{\theta 1-1}\ P_j - \{ C^{\theta 1}_j + (\theta - \theta_1)\ e_j \}$$
$$= (Z^{\theta 1}_j - C^{\theta 1}_j) + (\theta - \theta_1)\ \{E_B B^{\theta 1-1}\ P_j - e_j\}$$

بما ان $Z^{\theta 1}_j - C^{\theta 1}_j \geq 0$ وبذلك $Z^\theta_j - C^\theta_j \geq 0$ حيث الشرط

1. If $(E_B B^{\theta 1-1}\ P_j - e_j) \geq 0 \ \forall_j$
   $Z^\theta_j - C^\theta_j \geq 0$ is satisfied for all $\theta \geq \theta_1$
   ${}^{\theta 1}X_B$ Optimal for all $\theta \geq \theta_1$

2. if $(E_B B^{\theta 1-1}\ P_j - e_j) < 0$ for at least one j

$\exists$ Critical value $\theta = \theta_2$ which is given by

$$\theta_2 = \theta_1 + \text{Min}\ \{-({}^{\theta 1}Z_j - {}^{\theta 1}C_j) / (E_B B^{\theta 1-1} P_j - e_j)\}\ ,$$

$E_B B^{\theta 1-1} P_j - e_j < 0$ عندما $\theta = \theta_2$

X_k هو المتغيرات غير الاساسية المقابلة لـ θ_2

then

$$Z_k - C_k = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \theta_2$$

وهذا يعني عندما $\theta = \theta_2$ هناك حل بديل بينما $\theta \geq \theta_2$ فان الحل الاساسي ${}^{\theta 1}X_B$ هو الامثل . وهذا يعني ان $Z_k - C_k$ يصبح سالب عندما $\theta = \theta_2$ عند ئذ نطبق دورة اخرى من Simplex .

اذ ان :-

C_B: تمثل معاملات دالة الهدف للمتغيرات الاساسية

B^{-1}: تمثل مصفوفة المتغيرات غير الاساسية

P_j: تمثل معاملات القيود للمتغيرات غير الاساسية

E_B: تمثل مقدار التغير للمتغيرات الاساسية

e_j: تمثل مقدار التغير للمتغيرات غير الاساسية

θ : تمثل المعلمة (Parameter) وقيمتها ($-\infty \leq \theta \leq \infty$)

الجانب التطبيقي

تم تطبيق هذه الدراسة على مجموعة من المنتجات النفطية (البنزين,النفط الابيض,زيت الغاز) المنتجة من المصافي (مجمع بيجي, مصفى الدورة, مصفى, الشعيبة, مصفى السماوة)عينة البحث.

النموذج الرياضي

$$\text{Maximize } Z = \sum\sum c_{ij} x_{ij}$$

Subject to

$$x_{ij} \leq B_{ij}$$

$$\sum\sum x_{ij} \leq T_j$$

$$\sum\sum x_{ij} \leq R_j$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i=1,2,3),(j=1,2,3,4)$$

اذ ان

i : يمثل نوع المنتج .

j : يمثل المصفى المنتج للمنتج (i).

x_{ij}: تمثل متغيرات القرار, تعبرعن كميات انتاج المنتج (i) من المصفى (j) وان وحدة القياس هي (برميل/ يوم).

c_{ij} : تمثل ربحية الوحدة الواحدة من المنتج (i) المنتج من المصفى (j).

B_{ij} : تمثل معدلات الانتاج بالطاقة المتاحة المنتج (i) من المصفى (j).

T_j: تمثل الطاقة التصميمية للمصفى (j).

R_j: تمثل الطاقة التشغيلية للمصفى (j).

والجدول رقم (1) يبين معدلات الانتاج والطاقة التصميمية والتشغيلية والجدول رقم (2) يبين ربح المنتجات النفطية الثلاثة ضمن نطاق البحث.

جدول رقم 1: يبين معدلات الانتاج والطاقة التصميمية .التشغيلية.

المصافي	معدل الانتاج (برميل / يوم)			الطاقة التصميمية	الطاقة التشغيلية
	البنزين	النفط الابيض	زيت الغاز		
بيجي	6787	3502	4930	23835	17161
الدورة	4525	2335	3287	15890	11441
السماوة	904	466	657	3178	2288
الشعيبة	4072.5	2101.5	2658.3	14301	10296
الاجمالي	16288.5	8404.5	11532.3	57204	41186

جدول رقم 2: يبين ربح المنتجات النفطية(دينار/ برميل).

المنتج	الارباح(دينار/برميل
البنزين	649.9
النفط الابيض	240
زيت الغاز	243.2

وبناءا على هذه البيانات يمكن وضع النموذج الرياضي بالصيغة التالية

1. دالة الهدف (Objective Function)

ان دالة الهدف هي من نوع التعظيم(تعظيم الارباح) وان معاملات متغيرات دالة الهدف تعبر عن الربح المتحقق من انتاج الوحدة الواحدة من المنتج , لذا فان دالة الهدف هي :-

$$\text{Maximize } Z = 649.9x_{11} + 240x_{21} + 243.2x_{31} + 649.9x_{12} + 240x_{22} + 243.2x_{32} + 649.9x_{13} + + 243.2x_{33} + 649.9x_{14} + 240x_{24}\ \ 240x_{23} + 243.2x_{34}$$

2. القيود (Constraints)

ا- القيود المتعلقة بمنتجات بيجي

$$x_{11} \leq 6787$$
$$x_{21} \leq 3502$$
$$x_{31} \leq 4930$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 2383$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \leq 17161$$

ب- القيود المتعلقة بمصفى الدورة

$$x_{12} \leq 4525$$
$$x_{22} \leq 2335$$
$$x_{32} \leq 3287$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 15890$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} \leq 11441$$

ج- القيود المتعلقة بمنتجات مصفى السماوة

$x_{13} \leq 904$
$x_{23} \leq 466$
$x_{33} \leq 657$
$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 3178$
$x_{13}+x_{23}+x_{33} \leq 2288$

د- القيود المتعلقة بمنتجات مصفى الشعيبة

$x_{14} \leq 4072.5$
$x_{24} \leq 2101.5$
$x_{34} \leq 2958.3$
$x_{14}+x_{24}+x_{34} \leq 14301$
$x_{14}+x_{24}+x_{34} \leq 10296$
$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,2,3), (j = 1,2,3,4)$

وقد تم حل نموذج البرمجة الخطية اعلاه باستخدام البرنامج الجاهز (QSB) تبين ان قيمة دالة الهدف هي (18571230) وان جميع المتغيرات هي متغيرات اساسية.

اسلوب البرمجة المعلمية

في البداية نود ان نوضح انه عند اجراء التغيرات في معالم النموذج بشكل عام او في معاملات دالة الهدف بشكل خاص, يجب ان يكون لدينا هدف معين نرغب الوصول اليه ومعرفة ماسيؤول اليه الحل وماسيصاحبه من تغيرات وبالتالي تاثير هذه التغيرات على دالة الهدف والحصول على الحل الامثل. حيث تم اختيار قيم θ مابين ($50 \leq \theta \leq -5$). ولغرض دراسة التغيرات في قيم الربح للمنتجات في دالة الهدف تم احتساب النسبة المئوية لكل منتج بمقدار (20%) لكل منتج كما هو موضح في الجدول (3).

جدول رقم 3 : يبين مقدار التغير في الارباح .

المنتج	مقدارالتغيرفي الارباح(دينار/برميل)
البنزين	129.98
النفط الالبيض	48
زيت الغاز	48.64

وقد تم اضافة هذه القيم الى دالة الهدف وقد تم حل نموذج البرمجة المعلمية باستخدام البرنامج الجاهز QSB كانت النتائج كما هو مبين في الجدول رقم (4), حيث ان قيمة دالة الهدف تكون في زيادة مستمرة طالما قيمة المعلمة (θ) في زيادة اي هناك علاقة طردية بين دالة الهدف والمعلمة (θ) لذا فأن الحل الامثل سيكون عندما ($\theta = 50$) حيث ان قيمة دالة الهدف (170236300) اما بالنسبة للمتغيرات فان جميع المتغيرات كانت غير اساسية عندما(θ=-5) وان قيمة دالة الهدف تساوي صفر واصبحت جميع المتغيرات اساسية عندما($\theta > -5$).

جدول رقم 4: يبين حدود المعلمة (θ) والنتائج المترتبة عليه.

قيمة(θ)	قيمة دالة الهدف	التغيرات التي تطرأعلى المتغيرات
-5	0	جميع المتغيرات غيراساسية
-4	3095205	جميع المتغيرات اساسية
-3	6190409	جميع المتغيرات اساسية
-2	9285613	جميع المتغيرات اساسية
-1	12380820	جميع المتغيرات اساسية
0	15476020	جميع المتغيرات اساسية
1	18571230	جميع المتغيرات اساسية
2	21666430	جميع المتغيرات اساسية
3	24761640	جميع المتغيرات اساسية
4	27856840	جميع المتغيرات اساسية
5	30952050	جميع المتغيرات اساسية
10	46428070	جميع المتغيرات اساسية
15	61904090	جميع المتغيرات اساسية
20	74732980	جميع المتغيرات اساسية
30	108332240	جميع المتغيرات اساسية
40	139284200	جميع المتغيرات اساسية
50	170236300	جميع المتغيرات اساسية

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

نلاحظ ان قيمة دالة الهدف تساوي صفراي ان جميع المتغيرات هي متغيرات غيراساسية عندما ($\theta = -5$) وتبدأ بالتزايد كلما زادت قيمة ($\theta > -5$) اي ان اعلى قيمة لدالة الهدف عندما (θ=50) وجميع المتغيرات هي متغيرات اساسية.

التوصيات

1. زيادة انتاج المنتجات النفطية (بنزين, النفط الابيض, زيت الغاز) وتحسين النوعية مما يؤدي الى زيادة الارباح.
2. الاهتمام بالمصافي النفطية واجراء الصيانة الدائمة لجميع اقسامها مما يجعلها تقوم بعملها بصورة جيدة **وانشاء** مصافي نفطية جديدة ذات طاقة تشغيلية انتاجية كبيرة .
3. نوصي باجراء بحث يختص بدراسة التغيرات الحاصلة لمعاملات دالة الهدف والطرف الايمن من القيود معا وتأثيرها على الحل الامثل وهذا ما نأمل دراسته في البحوث المستقبلية

المصادر

1. Saaty, T.L. and S.I. Gass , **1954**. Parametric Objective Function (part 1). *Opns Res.Soc.Am*. **2**:316 - 319.
2. Gass , S.I. and T.L .Saaty **,1955** , Parametric Objective Function (part 2)- eneralization .*OpnsRes. Soc.Am*. **3**: 395 - 401.
3. الشيخ ,احمد عبد القادر عبد العزيز,**1998**. استخدام اسلوب البرمجة المعلمية في تخطيط الانتاج., رسالة ماجستير، كلية ادارة اقتصاد، جامعة بغداد.
4. Jones C.N. and Kerrigran E.C. and Maciejowski J.M ., **2008** . On Polyhedral Projection and Parametric Programming. *J. of Optimization Theory and Applications*. **138**:207-220.
5. Phillips, DonT., etal, **1979**. Operation Research; Principles and Practice. JohnWiley and Sons.Inc, New York.
6. Taha, H.A**, 1987**. *Operation Research an Introduction*. (4thed.).Macmillan publishing Co.Inc.N.Y.