مقدر بيز المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم باستخدام دالة التقلص الموزونة بحجم العينة الأولى

محمد حسين عبد الحميد جواد البيرماني

قسم العلوم الأساسية، كلية الزراعة، جامعة بغداد. بغداد-العراق.

الخلاصة

في هذا البحث تم الاعتماد على دالة للتقلص بدلالة المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم موزونة بعامل للتقلص عبارة عن دالة لحجم العينة الاولى وذالك في الحصول على المقدر البيزي المقلص بمرحلتين للتباين عند استخدامها ضمن صيغة المقدر المقلص بمرحلتين .

DOUBLE STAGE SHRINKAGE BAYES ESTIMATOR FOR THE VARIANCE OF NORMAL DISTRIBUTION WHEN THE MEAN IS UNKNOWN BY USE THE SHRINKAGE FUNCTION WEIGHTED OF FIRST SAMPLE SIZE .

Mohammad Huseen Abd ul-Hammeed Jawad Al-Bermani

Department of Basic Science, College of Agricultures, University of Baghdad. Baghdad-Iraq.

Apstract

In this articale we depend on Shrinkage function of Bayesian estimator for the variance of normal distribution when the mean is unknown weighted by Shrinkage factor like afunction of first sample size to obtain the double stage Shrinkage Bayesian estimator for the variance when using include double stage Shrinkage estimator formula.

المقدمة

احدى طرق ايجاد المقدر البيزي تتلخص با الاعتماد على ما متوافر من معلومات اولية حول المعلمة المجهولة وعلى دالة للكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X، وتعد هذة الطريقة من الطرق الشائعة الاستخدام با الاضافة الى طرق اخرى تحقق الغرض.

في هذا البحث سيتم الاعتماد على دالة للتوزيع الأولي للمعلمة الممثلة لتباين التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X بمتوسط مجهول μ وتباين مجهول σ^2 وعلى دالة للكثافة الاحتمالية يتم الحصول عليها من خلال استخدام تحويلات لمعادلات تحقق الهدف الممثل بايجاد مقدر بيز لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوما كمقدمة من الضروري الاشارة اليها وكما يلي :

$$f(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini}/\mu,\theta,\sigma^2)\alpha \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{ni}\left(\sigma^2\right)^{\frac{ni}{2}}} e^{\frac{-\sum_{j=1}^{ni}\left(x_{ij}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} .J(\theta)\ldots\ldots..(1)$$

(ينظر [1])

اذ ان $J(\theta)$ دالة للمتغير θ والتي تتوزع توزيع برنولي وصيغتها هي:

$$J(\theta)=\left[f\left(\prod_{j=1}^{ni}x_{ij}\right)\right]^{\theta-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

حيث ان

$$x_{ij} \sim N(\mu,\sigma^2)$$

لكل قيم

i=1, 2 and j=1, 2, …, ni

والمشاهدات ذات توزيع مستقل متماثل (i.i.d) .

$$\theta=\begin{cases}1 & \mu=\mu_0\ (\mu\quad known)\\ 0 & \mu\neq\mu_0\ (\mu\quad unknown)\end{cases}\quad \ldots\ldots(3)$$

(ينظر [2]) و

$$f(\prod_{j=1}^{ni} x_{ij})=\begin{cases} f(\prod_{j=1}^{ni} x_{ij}) & if\ \theta=1\\ f(\bar{x}_{ni}/\mu,\sigma^2) & if\ \theta=0\end{cases}\quad \ldots\ldots..(4)$$

حيث ان

$$\bar{x}_{ni}=\frac{\sum_{j=1}^{ni} x_{ij}}{ni}$$

و i=١،٢

في بحثنا هذا فان المتغير θ والذي يتوزع توزيع برنولي يأخذ القيمة صفر،وبناءا على ذالك سنحصل على دالة للكثافة الاحتمالية معتمدة على المعلمة المجهولة σ^2 وكما يلي:

$$f(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ini}/\mu,\sigma^2)=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{ni}(\sigma^2)^{\frac{ni}{2}}}e^{\frac{-\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{f(\bar{x}_{ni}/\mu,\sigma^2)}\quad ..(5)$$

$$=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{ni}(\sigma^2)^{\frac{ni}{2}}}e^{\frac{-\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni}+\bar{x}_{ni}-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{ni}\left(\frac{\sigma^2}{ni}\right)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-n_i(\bar{x}_{ni}-\mu)}{2\sigma^2}}}\quad \ldots..(6)$$

وباجراء العمليات الرياضية اللازمة سنحصل على دالة للكثافة الاحتمالية معتمدة على المعلمة المجهولة σ^2 فقط وصيغتها هي:

$$g(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini}/\sigma^2)=$$

$$=\frac{(\sqrt{ni})^{-1}e^{\frac{-\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni})^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{ni-1}(\sigma^2)^{\frac{ni-1}{2}}}}\quad \ldots\ldots..(7)$$

وباستخدام دالة التوزيع الأولي للمعلمة σ^2 وصيغتها هي :

$$g(\sigma^2)=\frac{(\frac{1}{\sigma^2})^{\alpha+1}[(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)]^{\alpha}e^{\frac{-[(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)]}{\sigma^2}}}{\Gamma\alpha}\quad \ldots.(8)$$

اذ أن $\alpha>٢$، $\sigma^٢>٠$ (ينظر [٣])

و $\sigma.^٢>٠$ قيمة اولية معطاة بصيغة نقطة كمعلومة مسبقة حول المعلمة $\sigma^٢$ حيث أن :

$$\sigma^2 \sim I\Gamma\left(\alpha,\frac{1}{(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)}\right)$$

(ينظر [4])

وبتطبيق نظرية القرارات فان دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة والمعبرعنها بما يلي :

$$h(\sigma^2/x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini})=\frac{g(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini}/\sigma^2)g(\sigma^2)}{\int_{\forall\sigma^2} g(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini}/\sigma^2)g(\sigma^2)d\sigma^2}\quad \ldots.(9)$$

وعلية فأن :

$$h(\sigma^2/x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini})=\frac{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{ni-1}{2}+\alpha+1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni})^2+2(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)}{2}\right]^{\frac{ni-1}{2}+\alpha}}{\Gamma\left(\frac{ni-1}{2}+\alpha\right)}\quad \ldots(10)$$

$$e^{\frac{\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni})^2+2(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)}{2\sigma^2}}$$

حيث أن

$$\sigma^2/x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ini}\sim I\Gamma\left(\frac{ni-1}{2}+\alpha,\frac{1}{\frac{\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni})^2+2(\sigma^2{}_0)(\alpha-1)}{2}}\right)$$

وباستخدام دالة خسارة مربع الخطأ والمعبر عنها بالصيغة التالية:

$$L(S^2_{ni},\sigma^2)=(S^2_{ni}-\sigma^2)^2 \cdots (11) \qquad i=1,2$$

فأن المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم هو :

$$S^2_{B.i}=E(\sigma^2/x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ini})=\frac{S^2_{ni}+2(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)}{2\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)+1} \qquad (12)$$

(ينظر[٥])

حيث ان

$$S^2_{ni}=\frac{\sum_{j=1}^{ni}(x_{ij}-\bar{x}_{ni})^2}{ni-1} \sim \text{Gamma}\left(\frac{ni-1}{2},\frac{2\sigma^2}{ni-1}\right)$$

$$i=1,2$$

والدالة الاحتمالية S^2_{ni} يعبر عنها بما يلي:

$$f(S^2_{ni}/\sigma^2)=\frac{(S^2_{ni})^{\frac{ni-1}{2}-1}e^{\frac{-(ni-1)S^2_{ni}}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{ni-1}{2}\right)\left(\frac{2\sigma^2}{ni-1}\right)^{\frac{ni-1}{2}}} \quad \dots (13)$$

$$S^2_{ni}>0$$

صيغة التوقع للمقدر $S^2_{B.i}$ هي كالاتي :

$$E(S^2_{B.i})=\frac{\sigma^2+2(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)}{2\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)+1} \qquad \dots (14)$$

وفي حالة $\sigma^2=(\sigma^2_0)$ فأن

$$E(S^2_{B.i})=(\sigma^2_0) \qquad \dots (15)$$

لكل قيم i=1,2

صيغة التباين للمقدر $S^2_{B.i}$ هي كالاتي :

$$Var(S^2_{B.i})=\frac{2(\sigma^2)^2}{(ni-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)+1\right]^2} \quad \dots (16)$$

وفي حالة $\sigma^2=(\sigma^2_0)$ فأن

$$Var(S^2_{B.i})=\frac{2[(\sigma^2_0)]^2}{(ni-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{ni-1}\right)+1\right]^2} \quad \dots (17)$$

لكل قيم i=1,2

2- دالة التقلص الموزونة بحجم العينة الأولى للمقدر البيزي للتباين

ان المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم ما هو الا عبارة عن دالة تجميعية ما بين القيمة الاولية (σ^2_0) كمعلومة مسبقة حول المعلمة σ^2 والمقدر الغير متحيز للتباين S^2_{ni} والذي يمتلك خاصية UMVUE والمحسوب من العينة المسحوبة بحجم $ni\geqq 5$ و i=1,2 .

وبناءا على ما تم ذكرة وبالاعتماد على معادلتين خاصتين والعلاقة الرياضية بينهما تم التوصل الى دالة للتقلص موزونة بعامل للتقلص عبارة عن دالة لحجم العينة الأولى n1 من العينة الكلية n=n1+n2 حيث ان n1=n2

والمعادلتين هما :

$$\mathbf{1}\text{-}Tk(m)=(\sigma^2_0)\left[1+K\left(\frac{(\sigma^2_0)}{S^2_{n1}}\right)^m\right] \quad \dots (18)$$

$$\mathbf{2}\text{-}Th(m)=(\sigma^2_0)\left[1+h\left(\frac{(\sigma^2_0)}{S^2_{n1}}\right)^m\right] \quad \dots (19)$$

أذ أن $m\neq 0$ (ينظر [6])

والعلاقة الرياضية بينهما هي ما يلي :

$$k=\left[\frac{2(\alpha-1)}{n1-1}+1\right]h \qquad \dots (20)$$

حيث أن $0\leq h\leq \frac{1}{\frac{2(\alpha-1)}{n1-1}+1}<1$

ومن المعادلة رقم 1 نحصل على ما يلي :

$$K=\frac{-[(\sigma^2_0)-\sigma^2][(\sigma^2_0)]^{m+1}E(S^2_{n1})^{-m}}{[(\sigma^2_0)]^{2m+2}E(S^2_{n1})^{-2m}} \quad \dots (21)$$

وذلك من خلال ما يلي :

$$\frac{\partial MSE[Tk(m)]}{\partial k}=0 \qquad \dots (22)$$

وباستخدام الدالة الاحتمالية للمقدر S^2_{n1} فان :

$$E(S^2_{n1})^{-jm}=\frac{\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}-jm\right)}{\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}\right)\left(\frac{2\sigma^2}{n1-1}\right)^{jm}} \quad \dots (23)$$

اذا j=1,2

$$k=\frac{-\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}-m\right)}{\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}\right)^{m+1}\left(\frac{n1-1}{2}\right)^m\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}-2m\right)} \qquad \dots (24)$$

وبالتعويض عن $k=\left[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1\right]h$ نحصل على ما يلي :

$$\left[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1\right]h=\frac{-\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}-1\right)\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-m)}{\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}\right)^{m+1}(\frac{n_1-1}{2})^m\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-2m)} \quad (25)$$

$$h=\frac{-\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}-1\right)\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-m)}{\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}\right)^{m+1}(\frac{n_1-1}{2})^m\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-2m)[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1]} \quad \ldots(26)$$

$$h=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}-m\right)-\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-m)}{\left(\frac{(\sigma^2_0)}{\sigma^2}\right)^{m+1}(\frac{n_1-1}{2})^m\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-2m)[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1]} \quad \ldots(27)$$

وبوضع S^2_{n1} بدلا من σ^2 في h (ينظر [7]) سنحصل على $\hat{h}$ والمعبر عنها بالصيغة التالية :

$$\hat{h}=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}-m\right)-\frac{(\sigma^2_0)}{S^2_{n1}}\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-m)}{(\frac{(\sigma^2_0)}{S^2_{n1}})^{m+1}(\frac{n_1-1}{2})^m\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-2m)[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1]} \quad (28)$$

وبوضع $\hat{h}$ بدلا من h في المعادلة (19) سنحصل على $\hat{T}h(m)$ وبالصيغة التالية :

$$\hat{T}h(m)=(\sigma^2_0)\ \ [1+\hat{h}\,(\frac{(\sigma^2_0)}{S^2_{n1}})^m] \quad \ldots(29)$$

$$\hat{\hat{T}}h(m)=(\sigma^2_0)+\frac{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}-m\right)}{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)^m\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}-2m\right)\left[\frac{2(\alpha-1)}{n_1-1}+1\right]}(S^2_{n1}-(\sigma^2_0)) \quad \ldots(30)$$

الدالة $\hat{T}h(m)$ دالة للتقلص للمقدر $S^2_{n.i}$ موزونة بعامل للتقلص معبر عنة بدالة لحجم العينة الاولى وبما أن

$$S^2_{B.1}-(\sigma^2_0)=\frac{S^2_{n1}-(\sigma^2_0)}{2\left(\frac{\alpha-1}{n_1-1}\right)+1} \quad \ldots(31)$$

فأن الدالة $\hat{T}h(m)$ مكافيء لدالة للتقلص بدلالة المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم موزونة بعامل للتقلص عبارة عن دالة لحجم العينة الاولى وبالصيغة التالية :

$$Bsf=(\sigma^2_0)+\ell[S^2_{B.1}-(\sigma^2_0)] \quad \ldots(32)$$

اذ ان

$$0<\ell=\frac{\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-m)}{(\frac{n_1-1}{2})^m\Gamma(\frac{n_1-1}{2}-2m)}<1$$

لكل قيم $m\neq 0$

وبافتراض ان m=-1 *فان عامل التقلص* ℓ سيكون بالصيغة التالية :

$$0<\ell=\frac{\Gamma(\frac{n_1-1}{2}+1)}{(\frac{n_1-1}{2})^{-1}\Gamma(\frac{n_1-1}{2}+2)}=\frac{n_1-1}{n_1+1}<1$$

3- مقدر بيز المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم

الدالة $\hat{T}h(m)=Bsf$ سيتم استخدامها ضمن صيغة المقدر المقلص بمرحلتين عندما $S^2_{n1}\in R^*>0$ والصيغة هي ما يلي :

$$(\tilde{\sigma}_B)^2=\begin{cases}(\sigma_0^2)+\ell[S^2_{B.1}-(\sigma_0^2)] & \text{if } S^2_{n1}\in R^*\\ C_1S^2_{B.1}+C_2S^2_{B.2}=S^2_{B.p} & \text{if } S^2_{n1}\in\bar{R}^*\end{cases} \quad \ldots(33)$$

(ينظر [8])

حيث ان

R^* تمثل منطقة الاختبار وقيمتها أكبر من الصفر

$\bar{R}^*$ تمثل منطقة الاختبار المكملة ل R^* وقيمتها أكبر من الصفر ايضا

و $S^2_{B.i}$ يمثل المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم والمحسوب من العينة المسحوبة بحجم ni و i=1,2 و

$$C_i=\frac{n_i-1}{n-2}\quad,\quad C_1+C_2=1$$

و $S^2_{B.p}$ يمثل المقدر البيزي لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم والمحسوب من العينة الكلية n=n1+n2 و $n1=n2\geq 5$ وعند التعويض فان :

$$S^2_{B.p}=\left(\frac{n_1-1}{n-2}\right)\left[\frac{S^2_{n1}+2(\sigma^2_0)(\frac{\alpha-1}{n_1-1})}{2\left(\frac{\alpha-1}{n_1-1}\right)+1}\right]+\left(\frac{n_2-1}{n-2}\right)\left[\frac{S^2_{n2}+2(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{n_2-1}\right)}{2\left(\frac{\alpha-1}{n_2-1}\right)+1}\right]\ldots(34)$$

بما ان n1=n2 فان n=2n1 اذا

$$S^2_{B.p}=\left(\frac{n_1-1}{2n_1-2}\right)\left[\frac{S^2_{n1}+2(\sigma^2_0)(\frac{\alpha-1}{n_1-1})}{2(\frac{\alpha-1}{n_1-1})+1}\right]+\left(\frac{n_1-1}{2n_1-2}\right)\left[\frac{S^2_{n2}+2(\sigma^2_0)(\frac{\alpha-1}{n_1-1})}{2(\frac{\alpha 1}{n_1-1})+1}\right]\ldots(35)$$

$$S^2_{B.p}=\frac{(n_1-1)[S^2_{n1}+S^2_{n2}]+4(n_1-1)\,(\sigma^2_0)(\frac{\alpha-1}{n_1-1})}{2(n_1-1)[2\left(\frac{\alpha-1}{n_1-1}\right)+1]} \quad (36)$$

فاذا كان

$$S^2_p=\frac{(n1-1)S^2_{n1}+(n2-1)S^2_{n2}}{n-2} \qquad \ldots(37)$$

حيث ان

$$S^2_p \sim \text{Gamma}\left(\frac{n-2}{2},\frac{2\sigma^2}{n-2}\right)$$

والدالة الاحتمالية ل S^2_p هي ما يلي :

$$f(S^2_p / \sigma^2)=\frac{(S^2_p)^{\frac{n-2}{2}-1} e^{\frac{-(n-2)S^2_p}{2\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{2\sigma^2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \qquad \ldots(38)$$

و $S^2_{B.i}>0$

فان

$$S^2_p=\frac{(n1-1)[S^2_{n1}+S^2_{n2}]}{2(n1-1)} \qquad \ldots(39)$$

وبناءا على ذلك فان

$$S^2_{B.p}=\frac{2(n1-1)S^2_p+4(n1-1)(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)}{2(n1-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]} \qquad \ldots(40)$$

$$S^2_{B.p}=\frac{2(n1-1)\left[S^2_p+2(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)\right]}{2(n1-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]}$$

$$=\frac{S^2_p+2(\sigma^2_0)\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)}{2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1} \qquad \ldots(41)$$

(1) تحديد منطقة الاختبار R^*

منطقة الاختبار R^* سيتم الحصول عليها من خلال تقليل متوسط الخطأ التربيعي للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ وبالاعتماد على ان $\sigma^2=(\sigma^2_0)$ والصيغة هي :

$$R^*=(\sigma^2_0) \mp C_2\sqrt{\frac{Var(S^2_{B.2})}{(\ell^2-C^2_1)}} \qquad \ldots(42)$$

(ينظر [9])

شرط ان $0<C_2\sqrt{\frac{Var(S^2_{B.2})}{(\ell^2-C_1^2)}}<(\sigma^2_0)$

مما يعني ضمنيا ان

$$\ell-C_1=\frac{n1-1}{n1+1}-\frac{n1-1}{n-2}=\frac{n1-1}{n1+1}-\frac{n1-1}{2(n1-1)}$$

$$=\frac{2(n1-1)^2-(n1-1)(n1+1)}{2(n1+1)(n1-1)}$$

$$=\frac{(n1-1)[2(n1-1)-(n1+1)]}{2(n1+1)(n1-1)}$$

$$\ell-C_1=\frac{(n1-1)[2n1-2-n1-1]}{2(n1+1)(n1-1)}=\frac{(n1-1)(n1-3)}{2(n1+1)(n1-1)}>0$$

لكل قيم $n1 \geq 5$

اذا R^* يمكن التعبير عنها بما يلي :

$$R^*=[\sigma^2_{0a},\sigma^2_{0b}] \qquad \ldots(43)$$

حيث ان

$$a=1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(n1-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]^2\{\ell^2-C_1^2\}}} \qquad \ldots(44)$$

$$b=1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(n1-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]^2\{\ell^2-C_1^2\}}} \qquad \ldots(45)$$

(2) اشتقاق معادلة متوسط الخطأ التربيعي للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$

صيغة متوسط الخطأ التربيعي للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ يعبر عنها بما يلي :

$$MSE((\tilde{\sigma}_B)^2/\sigma^2)=Var(S^2_{B,p})+\int_{R^*}\{[((\sigma^2_0)-\sigma^2)+\ell(S^2_{B.1}-(\sigma^2_0))]^2-[C^2_1[(S^2_{B.1}-\sigma^2)^2+Var(S^2_{B.2})]]\}f(S^2_{n1}/\sigma^2)dS^2_{n1} \qquad \ldots(46)$$

والتي تم الحصول عليها بالاعتماد على ان

$$MSE(S^2_{B.p})=Var(S^2_{B.p}) \qquad \ldots(47)$$

$$MSE(S^2_{B.2})=Var(S^2_{B.2}) \qquad \ldots(48)$$

اي ان $\sigma^2=(\sigma^2_0)$

وذلك ضمن تطبيقنا للصيغة التالية :

$$MSE((\tilde{\sigma}_B)^2/\sigma^2)=\int_{R^*}\{(\sigma^2_0)+\ell(S^2_{B.1}-(\sigma^2_0))-\sigma^2\}^2 f(S^2_{n1}/\sigma^2)dS^2_{n1}+\int_{S^2_{n2}}\int_{\bar{R}^*}\{S^2_{B.p}-\sigma^2\}^2 f(S^2_{n1}/\sigma^2)f(S^2_{n2}/\sigma^2)dS^2_{n1}\,dS^2_{n2} \qquad \ldots(49)$$

وباستخدام العمليات الحسابية فان صيغة متوسط الخطأ التربيعي للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم وباستخدام دالة التقلص الموزونة بحجم العينة الاولى يعبر عنها بما يلي :

$$MSE((\tilde{\sigma}_B)^2/\sigma^2)=$$

$$(\sigma^2)^2\left[\frac{2}{2(n1-1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]^2}+(\lambda-1)^2G_o+\frac{(n1-1)G_2}{(n1+1)\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]^2}+\frac{(n1-1)^2\lambda^2G_0}{(n1+1)^2\left[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1\right]^2}-\right.$$

$$\frac{2(n1-1)^2\lambda G_1}{(n1+1)^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}+\frac{2(n1-1)(\lambda-1)G_1}{(n1+1)[2\left(\frac{\alpha-1}{n1+1}\right)+1]}-\frac{2(n1-1)(\lambda-1)\lambda G_0}{(n1+1)[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]}$$

$$-\frac{4(n1-1)^2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)^2(\lambda-1)^2G_0}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}-\frac{(n1-1)(n1+1)G_2}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}$$

$$+\frac{2(n1-1)^2G_1}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}-\frac{(n1-1)^2G_0}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}-$$

$$\frac{4(n1-1)^2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)(\lambda-1)G_1}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}+\frac{4(n1-1)^2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)(\lambda-1)G_0}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}-$$

$$\frac{2(n1-1)G_0}{[2(n1-1)]^2[2\left(\frac{\alpha-1}{n1-1}\right)+1]^2}\;] \qquad \ldots(50)$$

اذ ان

$$\lambda=\frac{(\sigma^2{}_0)}{\sigma^2} \qquad \ldots(51)$$

$$G\phi=G[(n1-1)+2\phi;(n1-1)\lambda \quad b]-\quad G[(n1-1)+2\phi;(n1-1)\lambda \quad a] \qquad \ldots(52)$$

(ينظر [10]) حيث ان $\phi=0,1,2,\ldots$

الدالة $G\phi$ هي دالة للمتغير العشوائي الذي يتوزع مربع كاي بدرجة حرية $(n1-1)+2\phi$ والتي يتم استخدامها طبقا لدرجة التوقع ϕ للمقدر $S^2{}_{n1}$ وكما يلي :

$$E(S^2{}_{n1})^{\phi}=\int_{\forall S^2{}_{n1}\in R^+}(S^2{}_{n1})^{\phi}\, f(S^2{}_{n1}\,/\,\sigma^2)\,dS^2{}_{n1} \qquad \ldots(53)$$

ينتج ما يلي :

$$E(S^2{}_{n1})^{\phi}=\frac{\left(\frac{2\sigma^2}{n1-1}\right)^{\phi}\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}+\phi\right)}{\Gamma\left(\frac{n1-1}{2}\right)}G_{\phi} \qquad \ldots(54)$$

(3) حجم العينة المتوقع

صيغة حجم العينة المتوقع يعبر عنها بما يلي :

$$E(n/\sigma^2)=2n1-n1G_0\le 2n1 \qquad \ldots(55)$$

اذ ان

$$G_0=\Pr(S^2{}_{n1}\in R^*)=\int_{R^+}f(S^2{}_{n1}\,/\,\sigma^2)\,dS^2{}_{n1} \qquad \ldots(56)$$

(4) الكفاءة النسبية للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$

تعد خاصية الكفاءة النسبية من اهم المقاييس المهمة بالمفاضلة ما بين مقدرين حيث سيتم مقارنة المقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ بالمقدر $S^2{}_p$ وكما يلي :

$$REF((\tilde{\sigma}_B)^2,S^2{}_p\,/\,\sigma^2)=\frac{MSE(S^2{}_p/\sigma^2)*2n1}{MSE((\tilde{\sigma}_B)^2/\sigma^2)*E(n/\sigma^2)} \qquad \ldots(57)$$

وبناءا على ذلك فان الكفاءة النسبية للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم وباستخدام دالة التقلص الموزونة بحجم العينة الاولى هي دالة ل $n1,\ \alpha,\ \lambda,\ G_{\phi}$.

4- التطبيق

عند التطبيق تم الاعتماد على برنامج Math CAD لأيجاد صيغ التكاملات المحددة ولقيم مختلفة لـ Φ و λ و α و n1 والجداول اللاحقة تؤكد ما سيتم ذكرة من نتائج مهمة والتي هي:

١- حجم العينة المتوقع $E(n/\sigma^2)$ في حالة α=201 يكون اكثر قربا الى حجم العينة الحقيقي n=2n1 من حجم العينة المتوقع في حالة α=2.5 ولجميع القيم المختلفة ل λ و n=2n1 .
٢- اقتراب حجم العينة المتوقع $E(n/\sigma^2)$ من حجم العينة الحقيقي n=2n1 يكون اكبر في حالة ٠.١=$|\lambda-1|$.
٣- نتيجة الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ في حالة α=2.5 و α=201 اكبر من الواحد ولجميع القيم المختلفة لـ λ و n=2n1.
٤- نتيجة الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ تتزايد عندما λ تقترب من الواحد مع ملاحظة ان اكبر قيمة لنتيجة الكفاءة تكون عندما λ=1 ولجميع القيم المختلفة ل n=2n1 و α .
٥- نتيجة الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$تكون اكبر في حالة α=201 من نتيجة الكفاءة في حالة α=2.5 ولجميع القيم المختلفة لλ و n=2n1 .
٦- نتيجة الكفاءة تكون اكبر في حالة حجوم n=2n1 صغيرة ولجميع القيم المختلفة ل λ و α .

والنتائج التي تم ذكرها تؤكد على نجاح المقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ استنادا الى مبدأ التقليل من حجوم العينة المستخدمة ومبدأ أقتراب القيمة الأولية $(\sigma^2{}_0)$ من القيمة الحقيقية σ^2 عند حساب الكفاءة النسبية .

جدول رقم ١: حجم العينة المتوقع n1=n2=5 ,n=10

α	λ		
	1.1	1.0	0.9
2.5	7.543306	7.534944	7.589055
201	9.957426	9.957025	9.957484

جدول رقم ٢: حجم العينة المتوقع n1=n2=10 ,n=20

α	λ		
	1.1	1.0	0.9
2.5	15.648971	15.611581	15.74929
201	19.869712	19.86693	19.870107

جدول رقم ٣: حجم العينة المتوقع n1=n2=15 ,n=30

α	λ		
	1.1	**1.0**	**0.9**
2.5	23.608655	23.484356	23.763413
201	29.7305	29.72153	29.76318

جدول رقم ٤: الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ n1=n2=5 , n=10

α	λ		
	1.1	**1.0**	**0.9**
2.5	5.049643	5.209862	4.821417
201	2844.568	10289.242	2847.317

جدول رقم ٥: الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ n1=n2=10 , n=20

α	λ		
	1.1	1.0	0.9
2.5	2.637286	2.775425	2.577518
201	739.847	2092.952	741.2742

جدول رقم ٦:الكفاءة للمقدر $(\tilde{\sigma}_B)^2$ n1=n2=15 , n = 30

α	λ		
	1.1	**1.0**	**0.9**
2.5	2.116055	2.26854	2.077435
201	334.1754	890.928	335.137

5- الأستنتاجات

١- نتيجة الكفاءة للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم قيمتها تكون اكبر في حالة استخدامنا لحجوم للعينة صغيرة بسبب ان حجم العينة المتوقع كمؤشرثاني يعتمد علية عند حساب الكفاءة النسبية يكون اكثر قربا الى حجم العينة الحقيقي.

٢- نتيجة الكفاءة للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم قيمتها اكبر من الواحد وذلك لأن متوسط الخطأ التربيعي للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين قيمتة اقل من متوسط الخطأ التربيعي للمقدر الذي يمتلك خاصية المقدر الغير متحيز ذو اقل تباين والمنتظم ، باالاضافة الى ذلك قيمة الكفاءة تكون كبيرة جدا عند استخدامنا لمقدر بيزي للتباين بتباين قليل.

٣- نتيجة الكفاءة للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين لتباين التوزيع الطبيعي عندما يكون متوسط التوزيع غير معلوم قيمتها تكون كبيرة عندما تقترب القيمة الاولية من القيمة الحقيقية للمعلمة الخاصة بالتباين وذلك بسبب اعتماد الكفاءة على المؤشر الأول الممثل بمتوسط الخطأ التربيعي للمقدر البيزي المقلص بمرحلتين للتباين ذو اقل قيمة عند اقتراب القيمة الاولية من القيمة الحقيقية وعلى المؤشر الثاني حجم العينة المتوقع محققين معا اكبر قيمة للكفاءة النسبية عند اقتراب القيمة الاوليةمن القيمة الحقيقية .

المصادر

1. Shubhankar, R. and Bani, K. M. **2003**. A Bayesian Transformation Model for Wavelet Shrinkage. *IEEE TRANSAC. ON IMA. PROCESS.*, **12** (12):1512-1521.
2. THOMPSON, S. K. **1992**. *Sampling*. First Edition. JOHN WILEY & SONS, INC. New York.Pp.21-23.
3. Andrew G.; John, B.C.; Hal, S.S. and Donald, B.R. **2004**. *Bayesian Data Analysis*. Third Edition. CHAPMAN & HALL/CRC, New yok.PP.71-73.
4. Walter, W. P. and Beth, C. G. **1986**. ANOTE on the use of prior Interval Information in constructing Interval Estimates for Gamma Mean. *TECHNOM*. **28**(3): 269-273.
5. PANDEY, M. and SINGH, V.P. **1989**. Bayesian shrinkage estimation of Reliability From Acensored sample From afinite Range Failure Time Model. *Microelec. and Reliab.*, **29**(6): 955-958.
6. Jani, P. N. **1991**. Aclass of shrinkage estimators for the scale parameter of the exponential Distribution. *IEEE TRANSAC. ON RELIAB.*, **40** (1): 68-70.
7. Pandey, B.N. **1979**. on shrinkage estimation of normal population variance. *commun. statist. theor. meth.*, **AB**(4):359-365.
8. AL-Hemyari, Z.A. **1990** .On Doub le stage shrunken Estimator. AL-Mustans. *J. sci.*, **2**(1): 27-40.
9. Arnold and AL- Bayyati, H.A. **1970**. on double-stage estimation of the mean using prior knowl edge. *Biomet.*, **26**(4):787-800.
10. Kambo, N. S.; Handa, B. R. and .AL-Hemyari, Z. A. **1990**. On shrunken estimators for exponential scale Parameter. *J. of statist. Plann. and infer.*, (24): 87-94.