تكامل صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى

رافد فياض حمدي
anwaralshkh@gmail.com
قسم الإحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية . بغداد-العراق

الخلاصة

تم التوصل في هذا البحث إلى صيغة لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى قابلة للتكامل حيث عندما نجري التكامل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة (r) سنحصل على صيغة لمجموع الأعداد الطبيعية للقوة (r+1) ويعود السبب في ذلك، بإعادة تنظيم الصيغة والتي كانت غير قابلة للتكامل عندما كانت بدلالة المتغير n (وهو اكبر رقم مراد أيجاد الصيغة لهُ) و أصبحت قابلة للتكامل عندما تم جعلها متسلسلة قوى بدلالة المتغير B=n(n+1) بدل المتغير n بالنسبة لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية كذلك أصبحت صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية قابلة للتكامل بدلالة المتغيرين A=2n+1 و B=n(n+1) بدل المتغير n. لقد توصلنا في هذا البحث أيضاً إلى وجود علاقات بين صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وبين كل من صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى وصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى.

الكلمات المفتاحية:- مجموع الاعداد الطبيعية للقوى ، متسلسلة القوى.

INTEGRATION POWER SUMS OF INTEGER NUMBERS FORMULA

Rafid Fayadh Hamdi
Department of statistics, College of Administration and Economics, University of Al-Mustansiryah. Baghdad-Iraq

Abstract

In this paper we fulfill to the power sums of integer numbers formula capable of integration. , in which when we make the Integration for the (r) power sums of integer numbers formula we obtain (r+1) power sums of integer numbers formula because we rearrangement the formula was writing denoted by single variable n (the greatest number we wanted find power sums to it). The formula become able to integrate when power series rewrite denoted by variable B=n (n+1) instead of single variable n, for odd power sums of integer numbers formula. also the even power sums of integer numbers formula become able to integrate ,if we rewrite it denoted by two variables A=2n+1 & B=n(n+1) allowance single variable n. farther more in this paper we advance to locate the relationship between power sums of integer numbers formula, and each of power sums of odd integer numbers formula and power sums of even integer numbers formula.

Keywords:- sums of integer numbers, Numbers Formula

١ – المقدمة

سوف نتناول في هذا البحث طريقة لتكامل صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى من خلال أعادة تنظيم الصيغة التقليدية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى والتي تعرف بدلالة المتغير n وهذهِ الصيغة غير قابلة للتكامل وجعلها بدلالة المتغير B=n(n+1) لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية وبدلالة المتغيرين B=n(n+1) و A=2n+1 لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية وعندها سوف تصبح الصيغ قابلة للتكامل. في هذهِ الفقرة سنستعرض جهود الباحثين في هذا الموضوع وحسب التسلسل الزمني. ومن المشهود للعرب والمسلمين تقدمهم العلمي منذ العصر البابلي وصولاً إلى القرن الرابع عشر الميلادي حيث توصلوا إلى مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية فلقد توصل السموئل أبن ياها أبن يهودا المغربي ولد ببغداد (1180 – 1125) من أبوين يهوديين ثم اعتنق الإسلام في العقد الرابع من عمرهُ وهو أول من وضع دالة ذي الحدين ومعاملاتها والتي تعرف بالتوافيق [1] ولهذهِ المعاملات دور مهم في إيجاد صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وقد اكتشف السموئل مثلث ويعرف اليوم بمثلث Pascal فقد وجد بأن مجموع كل معاملين متتاليين يساوي معامل بحجم مجتمع k+1 مثلاً للمجتمع بحجم k سحبت منهُ عينة بدون إرجاع بحجم m وأخرى بحجم m+1 فأن مجموع هذهِ التوافيق يساوي توافيق m+1 من k+1 واستطاع إثبات هذهِ العلاقة لحد قيم k التي تساوي 12 أو أقل وكما سنبين في الجانب النظري أهمية مثلث Pascal في أيجاد صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى. لقد وُجد في كتاب مفتاح الحساب في (1303) لمؤلفهُ غايث الدين جمشيد الكاشي صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الرابعة بالإضافة إلى طريقة لجمع معاملات دالة ذي الحدين عندما حجم العينة ثابت وحجم المجتمع يزداد بوحدة واحدة في كل مرة و لهذهِ الطريقة أهمية بالغة في الوصول إلى صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى. [2] تمكن Johannes Faulhaber (1635–1580) من التوصل إلى صيغ لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى ولحد القوة 17 ولكن الطريقة تتسم بالتعقيد حيث اشتقاقاتها طويلة وغير قابلة للتعميم لقوى أعلى مما دفع الآخرين للاستمرار بالبحث عن طرق أسهل وقابلة للتعميم على جميع القوى. [3]

فلقد كتب Ismael Boulliau (1694 – 1605) مئات الصفحات لإيجاد صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الخامسة والسادسة وفي نفس الفترة ظهرت مساهمات لـ Johannes Remmelin و Nicolaus Mercator في هذا المجال. [3] وقد تأثر Bernoulli بعمل هؤلاء الثلاثة مما ساعدهُ في التوصل إلى أفضل صيغة عامة في حينها لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى حيث وضع أرقام تعرف باسمهُ كان لها دور أساسي في عدد من الصيغ ومنها صيغة مجموع الأعداد و على الرغم من معاصرة Jakob I Bernoulli لـ Blaise Pascal (1662 – 1623) والمعروف بمثلث Pascal ألا أن Bernoulli لم يهتم بجهودهُ أو يتأثر بأفكارهُ. ومن الجدير بالذكر أن الأسماء الثلاثة لــ Bernoulli وهي Jakob I Bernoulli أو Jacob I Bernoulli أو James Bernoulli تعود لنفس الشخص وهو من مواليد Basel في سويسرا (1705 – 1654) ونلاحظ أسم Bernoulli في كثير من المصادر العلمية المتنوعة ويعود السبب لكثرة أقارب Jakob I Bernoulli والمعروفين في مجالات علمية متعددة ومن أشهرهم أخوه Johannes I Bernoulli (1667–1748) وأبن أخوه Daniel Johannes Bernoulli I (1700 – 1795) و أبن أختهُ أو أبن أخوهُ Nicolus Bernoulli – 1687) (1795 وأربعة آخرين ينتمون لنفس العائلة أي من أقارب Bernoulli.[1]

ومن أبناء مدينة Bernoulli السويري Leanhard Euler (1783 – 1707) الذي استطاع وضع مثلث على غرار مثلث Pascal و اعتماداً على هذا المثلث أوجد صيغة لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى. كذلك تمكن من أيجاد صيغة لمجموع مقلوب الأعداد الطبيعية للقوى وتعرف بــ Harmonic Numbers وتزداد الصيغة دقةً بازدياد عدد الحدود المراد جمعها وتعتمد هذهِ الصيغة على أرقام Bernoulli.[4]

وعلى غرار صيغة Euler وضع الاسكتلندي James Stirling (1770 – 1692) صيغة أخرى لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى تعتمد على أرقام تعرف باسمهُ وتسمى بالتحديد (أرقام Stirling من النوع الثاني أو k – block partition). [1].

لقد أستخدم Leopold Kronecker (1891 – 1823) تقنية أخرى اعتماداً على أرقام تأخذ القيم أما صفر أو واحد وتعرف بـ

Kronecker delta حيث وضع معادلات في طرفها الأيمن أرقام تعرف بـ Kronecker delta وفي الطرف الأيسر متسلسلة قوى بدلالة المتغير n وهو أكبر رقم مراد أيجاد مجموع الأعداد الطبيعية للقوى لحد الرقم n وبحل تلك المعادلات سوف نحصل على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وبدلالة المتغير n والذي عرفناهُ سابقاً ومن المعروف يوجد عدة طرق لحل تلك المعادلات. [3]

في القرنين التاسع عشر والعشرين ظهر العديد من الباحثين الذين ساهموا في وضع أو وضعوا صيغ لحساب مجموع الأعداد الطبيعية للقوى منها قابل للتطبيق يدوياً ومنها ما يمكن تطبيقهُ باستخدام برنامج قصير على الحاسبة ومن أبرزهم Bernhard Riemann (1866 – 1826) والذي طور دالة Riemann وعرفت الدالة باسمه Zeta function

Zeta function وقد ساهمت في التوصل إلى صيغة لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى بعد أن طورها Adolf Hurwitz (1919 – 1859) ويوجد الكثير من الأسماء ويقابلها الكثير من الصيغ التي تخص هذا الموضوع.

يتألف البحث بالإضافة إلى هذهِ المقدمة من هدف البحث والذي سوف نوضحهُ في الفقرة التالية ثم يليه الجانب النظري وفيهِ توضيح لأهم صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى التي وضعها الباحثون السابقون المشار أليهم أعلاه كذلك الصيغ التي توصل إليها الباحث ومن ثم الجانب التطبيقي وفيهِ تم استخدام المصفوفات لحساب قيم معاملات الصيغ ثم الاستنتاجات وأخيراً (الجدول 1, 2)اللذان يحتويان على معاملات صيغ البحث وللقوى الفردية والزوجية على التوالي.

٢ – هدف البحث The goal of research

تعتبر صيغة Faulhaber لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى نقطة الانطلاق لجميع الصيغ التالية لها حيث بينت وجود صيغ مختلفة للقوى الفرية وأخرى للقوى الزوجية وفيما يلي تلك الصيغ.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2s+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \left[\sum_{j=1}^{s} a_j \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{s-j}\right]$$

وفي أدناهِ الصيغة الخاصة بالقوى الفردية ومن السهولة معرفة 2s + 1 عدد فردي.

و في أدناه الصيغة خاصة بالقوى الزوجية ومن السهولة معرفة 2s عدد زوجي.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2s} = \left(\sum_{k=1}^{n} k^{2}\right) \left[\sum_{j=1}^{s} b_j \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{s-j}\right]$$

ألا أنهُ أعتمد في استخراج المعاملات aj , bj على اشتقاقات مطولة وغير قابلة للتعميم حيث استطاع التوصل إلى تلك المعاملات لحد القوة 17. [3] بينما صيغة البحث والتي تعتبر امتداد لجهود Faulhaber تتسم بقابليتها على التعميم لأي قوة وذلك لتوصل الباحث إلى صيغة عامة تأخذ البعد الهندسي بنظر الاعتبار وذلك بترتيب تلك الأعداد بأشكال هندسية مجسمة مما ساعد على وضع صيغة رياضية شاملة لجميع تلك الأشكال وتمتاز بقابليتها على التكامل بحيث عند أجراء التكامل للصيغ الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r نحصل على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r+1 والعكس بالعكس.

حيث تم وضع صيغتان على غرار صيغتي Faulhaber الأولى للقوى الفردية و بدلالة المتغير B وفي أدناه الشكل العام لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية حسب صيغة البحث.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r} = \sum_{i=2}^{q} m_{q-i+1} B^{i} / m_0$$

$$i = 2,3,\ldots,q \quad , \; k = 1,2,3,\ldots,n$$

حيث r هي القوة واكبر عدد هو n و $q = (r+1)/2$ و m_0 معامل المقام وتختلف قيمتهُ باختلاف القوة r و $B=n(n+1)$ ودائماً أشارة m_1 تكون موجبة و أشارة m_2 تكون سالبة وهكذا بالتناوب و(الجدول **1**) يبين قيم المعاملات.

و الثانية للقوى الزوجية وبدلالة كل من المتغيرين A و B وفي أدناه الشكل العام لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية حسب صيغة البحث.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r} = \sum_{i=1}^{q} m_{q-i+1} A B^{i} / m_0$$

$$i = 1,2,3,\ldots,q \; , \; k = 1,2,3,\ldots,n$$

حيث r هي القوة واكبر عدد هو n و $q = r/2$ و m_0 معامل المقام وتختلف قيمتهُ باختلاف القوة r و $B=n(n+1)$

و A=2n+1 ودائماً أشارة m_1 تكون موجبة و أشارة m_2 تكون سالبة وهكذا بالتناوب والجدول رقم **2** يبين قيم المعاملات.

الهدف من البحث هو إيجاد صيغة لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى قابلة للتكامل و كما في صيغتي البحث لكل من القوى الفردية والقوى الزوجية المشار أليهما أعلاه واللتان لهما القابلة على التكامل كما سنبين في الفقرات اللاحقة كذلك أيجاد المشتقة لكل من صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية و صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية .

كذلك يهدف البحث إلى أيجاد صيغ أخرى قابلة للتكامل وأيضا بالإمكان إيجاد المشتقة لتلك الصيغ كصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية ولصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الزوجية ولصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية ولصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية.

3- الجانب النظري The Theoretical pane

لقد ظهرت طرق أخرى لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وذلك لصعوبة اشتقاقات Faulhaber ومنها طريقة Bernoulli والتي تعتمد على أرقام Bernoulli ويرمز لها بـ B_j حيث أن $B_0 = 1$ وبقية الأرقام يمكن استخراجها من الصيغة التالية:

$$\sum_{j=0}^{n} C_j^{n+1} B_j = 0 \qquad n \geq 1$$

ونلاحظ أن قيمة B_1 تعتمد على B_0 و قيمة B_2 تعتمد على قيمتي B_0 و B_1 وهكذا فأن كل قيمة من قيم B_j تعتمد على أرقام Bernoulli التي سبقتها و عن طريق تلك الأرقام تم وضع متسلسلة القوى وصيغتها:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k^m B_k x^{m-k}$$

وبعد التبسيط تصبح متسلسلة القوى لـ Bernoulli على الشكل التالي

$$B_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_k^{m+1} \sum_{j=0}^{k-1} (x+j)^m$$

حيث تشير الـ m إلى القوة و B_k تعني $B_k(0)$ أي عندما x = 0 ومن الفرق بين المتسلسلتين (مشتقة الصيغة بالنسبة لـ x) نحصل على الصيغة التالية:

$$x^m = \left(B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x)\right)/(m+1) \qquad m \geq 0$$

عند إدخال المجموع لقيم x من 1 إلى n نحصل على الصيغة التالية

$$\sum_{x=1}^{n} x^m = \left(B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(0)\right)/(m+1) \qquad m \geq 0$$

من المأخذ على طريقة Bernoulli هو عدد المعاملات الكبير حيث تزداد بزيادة m مع صعوبة التنبؤ بعدد المعاملات ولا قيمها. [1]

لذلك وضع Euler مثلث على غرار مثلث Pascal وهذا المثلث هو عبارة عن أرقام تدعى بأرقام Euler ويرمز لها بـ E(m , n) حيث m تعني عدد عناصر المجموعة و n تعني عدد عمليات المقارنة الناجحة بين كل عددين متتاليين داخل المجموعة ومن المعلوم أن المجموعة بحجم m يمكن ترتيب عناصرها بـ m! طريقة للترتيب في كل طريقة سوف نجري عملية مقارنة بين كل زوجين متتاليين من عناصر المجموعة فإذا كان الترتيب متزايد تعني المقارنة ناجحة وبالتالي يمكن معرفة كم ترتيب فيهِ n مقارنة ناجحة في m! ترتيب ويرمز لها بـ E(m , n) وهذا يعني أن مجموع أرقام Euler لمجموعة بحجم m فيها k = 0 ,1 , 2 , ... , n-1 من المقارنات الناجحة تساوي m! كما في الصيغة التالية:

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(m,k) = m! \qquad m \geq 1$$

كذلك العلاقة التالية بين أرقام Euler على غرار العلاقة بين مكونات مثلث Pascal. كما ويمكن الحصول على أرقام Euler من خلال الصيغة التالية:

$$E(m,n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^{m+1} (n-j+1)^m \qquad m \geq 1$$

و من هذهِ الصيغة والتي تعتبر المفتاح لصيغة Euler الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية للقوى.

$$x^m = \sum_{n=0}^{m-1} E(m,n)\, C_m^{x+n} \qquad m \ge 1$$

نستطيع الوصول إلى الصيغة النهائية التالية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى. [1]

$$\sum_{x=0}^{r} x^m = \sum_{n=0}^{m-1} E(m,n)\, C_{m+1}^{r+n+1} \quad m \ge 1$$

لقد استطاع Euler أن يضع صيغة تمكن من خلالها الوصول إلى أرقام Bernoulli بدلالة أرقام Euler وهذهِ هي الصيغة.

$$B_m = \frac{m}{2^m\left(2^m-1\right)} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n\, E(m-1,n) \quad m \ge 2$$

كذلك استطاع Euler أن يضع صيغة تمكن من خلالها الوصول إلى أرقام Stirling والتي سنتناولها لاحقاً ويرمز لها بـ S(m , n) بدلالة أرقام Euler وهذهِ هي الصيغة

$$S(m,n) = \frac{1}{n\,!} \sum_{k=0}^{m-1} E(m,k)\, C_{m-n}^{k} \quad m \ge n \quad m \ge 1$$

ومن الجدير بالإشارة هنا إلى الصيغة التالية لمجموع مقلوب الأعداد الطبيعية للقوى لـ Euler وتسمى harmonic function و أحياناً تسمى Zeta function وقد كان لهذهِ الصيغة أهمية كبيرة في التوصل من خلالها إلى صيغة مجموع الإعداد الطبيعية للقوى علماً بأن الصيغة تزداد دقةً بزيادة n و B_{2n} هو رقم Bernoulli. [4]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2n}} = \xi(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} \left|B_{2n}\right| \quad n = 1,2,3,\ldots$$

لقد كان عمل Stirling مقارب لعمل Euler حيث وضع أيضاً مثلث يعرف بمثلث Stirling ويحتوي على أرقام Stirling من النوع الثاني أو k – block partition ويرمز لها بـ S(m , n) فإذا كانت مجموعة مكونة من m عنصر وتم تقسيمها إلى n مجموعة غير خالية فأن عدد الطرق الممكنة لتكوين n مجموعة من m عنصر هي S(m , n) وعلى غرار مثلثي Euler و Pascal توصل Stirling إلى العلاقة التالية بين مكونات مثلثهُ.

$$S(m+1,n) = S(m,n-1) + n\,S(m,n) \quad m \ge n \ge 2$$

وقد وضع Stirling العلاقة التالية والتي كانت المفتاح الأساسي لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى.

$$k^m = \sum_{r=1}^{m} S(m,r)\ P(k,r) \qquad m \ge 1$$

حيث أن عبارة عن تباديل r Permutation من k و من الصيغة أعلاه نحصل على الصيغة التالية:

$$k^m = \sum_{r=1}^{m} r!\,S(m,r)\ C(k,r) \quad m \ge 1$$

وبقلب الصيغة أعلاه نحصل على الصيغة التالية حيث C(r , t) عبارة عن توافيق t Combination من r

$$a_{rm} = r!\ S(m,r) = \sum_{t=1}^{m} (-1)^{r+t}\ C(r,t)\, t^m \quad m \ge 1$$

ومن الممكن التعبير عن الصيغة أعلاه بدلالة المصفوفات وكما يلي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 & \ldots \\ 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \ldots \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}$$

المصفوفة على جهة اليسار هي معكوس مثلث Pascal والتي على جهة اليمين هي t^m وبضرب المصفوفتين سنحصل على قيم a_{rm} وهذهِ القيم موجودة في العمود m من المصفوفة الناتجة أي a_{1m} فهي قيمة الصف الأول في العمود m و قيمة الصف الثاني في العمود m وهكذا وصولاً إلى الصف m في العمود m ومن الصيغ أعلاه نحصل على الصيغة التالية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى بدلالة أرقام Stirling من النوع الثاني. [2]

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{r=1}^{m} r!\,S(m,r)\,C(n+1,r+1) \quad m \ge 1$$

لقد أخذ Kronecker منحى أخر بوضعهِ الـ delta والتي تأخذ القيمة أما صفر أو واحد ويرمز لها δ_{km} فعندما $k \neq m$ تكون القيمة صفر و أذا $k = m$ تأخذ القيمة واحد وبدلالة الـ delta تمكن من وضع الصيغة التالية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى.

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{\delta_{km}} C_k^{m+1} B_{m+1-k}\, n^k$$

و كما في الصيغ السابقة B_{m+1-k} رقم Bernoulli ويعتبر الجزء التالي من الدالة عبارة عن دالة احتمالية لان مجموعها يساوي واحد.

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{\delta_{km}} C_k^{m+1} B_{m+1-k} = 1$$

و من ثم طورت الصيغة أعلاه لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى من قبل Riemann وتلاه Hurwitz لتصبح الصيغة الناتجة على الشكل التالي:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i (i-j)^m C_{n-i}^{n+m-i+1} C_j^{m+1}$$

استطاع Schultz (1980) من وضع متسلسلة القوى التالية كشكل عام لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى.

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = c_{m+1} n^{m+1} + c_m n^m + \dots + c_1 n$$

و لاستخراج المعاملات c_{m+1} ، c_m ، ... ، c_1 يجب وضع m+1 معادلة في طرفها الأيمن أرقام تدعى Kronecker delta وفي الطرف الأيسر المجموع للتوافيق مضروب بالمعاملات و على الصورة التالية:

$$\sum_{i=j+1}^{m+1} (-1)^{i-j+1} C_j^i c_i = \delta_{jm} \qquad j = 0,1,2,\dots,m$$

عند حل تلك المعادلات و بأي طريقة من الطرق المختلفة لحل المعادلات يمكن الحصول على قيم المعاملات c_{m+1} ، c_m ، ... ، c_1 وبالنتيجة الحصول على متسلسلة القوى للأساس n و للقوة m+1 والتي هي صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة m. [4]

في ما سبق استعرضنا أشهر الطرق لإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية للقوى و من الملاحظ بعدها عن الجانب الهندسي من جهة و تتطلب أما وجود جداول تحتوى على أرقام معدة مسبقاً أو طريقة لحل المعادلات لاستخراج المعاملات أو عمليات حسابية معقدة من جهةٍ أخرى . أما الطريقة المستخدمة في هذا البحث فتعتمد على ترتيب مكعبات بشكل هندسي معين تمكن من خلالها الباحث من الوصول إلى قانون عام ينطبق على جميع القوى الفردية وكما مبين في الصيغة رقم 1 أدناه.

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{m_1 B^{\frac{r+1}{2}} + m_2 B^{\frac{r-1}{2}} + m_3 B^{\frac{r-3}{2}} + \dots + m_{\frac{r-1}{2}} B^2}{m_0} \quad \dots 1$$

$$k = 1,2,3,\dots,n \qquad B = n(n+1)$$

و من الملاحظ أن صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r تتألف من $\frac{r-1}{2}$ معامل في البسط بالإضافة إلى معامل المقام والصيغة عبارة عن متسلسلة قوى يكون فيها المتغير B = n (n +1) ويكون مرفوع للقوة $\frac{r+1}{2}$ مع المعامل الأول m_1 ومرفوع للقوة $\frac{r-1}{2}$ مع المعامل الثاني m_2 و هكذا وصولاً إلى أخر معامل والذي يحمل القوة 2.

أما الصيغة الخاص بالقوى الزوجية و التي توصل أليها الباحث والموضحة في الصيغة رقم 2 أدناه.

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{m_1 A B^{\frac{r}{2}} + m_2 A B^{\frac{r-2}{2}} + m_3 A B^{\frac{r-4}{2}} + \dots + m_{\frac{r}{2}} A B}{m_0} \quad \dots 2$$

$$k = 1,2,3,\dots,n \qquad A = 2n+1 \qquad B = n(n+1)$$

و من الملاحظ أن صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r تتألف من $\frac{r}{2}$ معامل في البسط بالإضافة إلى معامل المقام و الصيغة عبارة عن متسلسلة قوى يكون فيها المتغيرين A=2n+1 و B = n (n + 1) ويكون المتغير B مرفوع للقوة $\frac{r}{2}$ مع

المعامل الأول m_1 ومرفوع للقوة $\frac{r-2}{2}$ مع المعامل الثاني m_2 و هكذا وصولاً إلى أخر معامل والذي يحمل القوة 1. في الجدولين رقم 1 و 2 قيم المعاملات لكلا الصيغتين رقم 1 و 2 وعلى التوالي.

تمتاز صيغتي البحث رقم 1 و رقم 2 و الخاصة بإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية و مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية على التوالي بقابليتها على التكامل حيث يمكن أجراء التكامل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r للحصول على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r+1 حيث يتم أجراء التكامل لكل حد من حدود الصيغة رقم 1 على حدة و حسب ما مبين في الصيغة رقم 3 أدناه.

$$\int B^T dn = \frac{\sum_{x=1}^{T}(-1)^{x+1} C_{(T-x)}^{2(T-x)+1} AB^{(T-x+1)}(r+1)}{2(2T+1)C_{(T-1)}^{(2T-1)}\, m_0} \quad ....3$$

علماً بان m_0 معامل المقام للصيغة الخاصة بالقوة الفردية r و من ثم نضرب ناتج التكامل بالمعامل المرفق مع المتغير B^T والخاص بالصيغة للقوة الفردية r ثم نجري بقية عمليات التبسيط كاستخراج المضاعف المشترك الأصغر للمقام لتوحيد المقامات ثم نبسط المقدار أن أمكن وذلك باستخراج العامل المشترك الأعظم بين كل من معاملات البسط والمقام ثم قسمة جميع المعاملات على العامل المشترك الأعظم.

كما و يمكن أجراء التكامل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r للحصول على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r+1 حيث يتم أجراء التكامل لكل حد من حدود الصيغة رقم 2 على حدة و حسب ما مبين في الصيغة رقم 4 أدناه.

$$\int AB^T dn = \frac{B^{(T+1)}(r+1)}{(T+1)\, m_0} \quad ... \ 4$$

علماً بان m_0 معامل المقام للصيغة الخاصة بالقوة الزوجية r و من ثم نضرب ناتج التكامل بالمعامل المرفق مع المتغير AB^T والخاص بالصيغة للقوة الزوجية r ثم نجري بقية عمليات التبسيط كاستخراج المضاعف المشترك الأصغر للمقام لتوحيد المقامات ثم نبسط المقدار أن أمكن وذلك باستخراج العامل المشترك الأعظم بين كل من معاملات البسط والمقام ثم قسمة جميع المعاملات على العامل المشترك الأعظم.

للتحقق من صحة الصيغة أو القانون الناتج من عملية التكامل يمكن أخذ المشتقة لها حيث تعتبر المرادف للتكامل ولذلك لابد هنا من الإشارة إلى طرق الاشتقاق لكل من الصيغتين رقم 1 و رقم 2 حيث عند اشتقاق الصيغة رقم 1 وللقوة الفردية r

سوف نحصل على الصيغة رقم 2 والخاصة بالقوة الزوجية r-1 و كذلك عند اشتقاق الصيغة رقم 2 وللقوة الزوجية r سوف نحصل على الصيغة رقم 1 والخاصة بالقوة الفردية r-1.

حيث يتم اشتقاق كل حد على حدة ومن ثم ضرب ناتج المشتقة بالمعامل المرفق مع الحد المشتق و للقوة r كما وضحنا في عملية التكامل سابقاً فبالنسبة لاشتقاق صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية و بحسب الصيغة رقم 5 أدناه.

$$\frac{dB^T}{dn} = \frac{TAB^{T-1}}{r\, m_0} \quad ..... \ 5$$

علماً بان m_0 معامل المقام للصيغة الخاصة بالقوة الفردية r و من ثم نضرب ناتج التكامل بالمعامل المرفق مع المتغير B^T والخاص بالصيغة للقوة الفردية r ثم نجري بقية عمليات التبسيط كاستخراج المضاعف المشترك الأصغر للمقام لتوحيد المقامات ثم نبسط المقدار أن أمكن وذلك باستخراج العامل المشترك الأعظم بين كل من معاملات البسط والمقام ثم قسمة جميع المعاملات على العامل المشترك الأعظم .وبالتالي سوف نحصل على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r-1.

أما عند أخذ الاشتقاق لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية ولكل حد على حدة وبحسب الصيغة رقم 6 أدناه.

$$\frac{dAB^T}{dn} = \frac{2(2T+1)B^T + TB^{T-1}}{r\, m_0} \quad ...... \ 6$$

علماً بان m_0 معامل المقام للصيغة الخاصة بالقوة الزوجية r و من ثم نضرب ناتج التكامل بالمعامل المرفق مع المتغير AB^T والخاص بالصيغة للقوة الزوجية r ثم نجري بقية عمليات التبسيط كاستخراج المضاعف المشترك الأصغر للمقام لتوحيد المقامات ثم نبسط المقدار أن أمكن وذلك باستخراج العامل المشترك الأعظم بين كل من معاملات البسط والمقام ثم قسمة جميع

المعاملات على العامل المشترك الأعظم .وبالتالي سوف نحصل على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r-1.

في (الجدول 1). قيم المعاملات لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية القوى الفردية ولحد القوة 19 وفي (الجدول 2) قيم المعاملات لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية ولحد القوة 18.

٤ – الجانب التطبيقي The Application

سوف نستخدم المصفوفات في أيجاد التكامل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية الصيغة رقم 1 و كما ذكرنا في الفقرة السابقة بأن تكامل الصيغة التي تحمل القوة الفردية r والتي تحتوي على $\frac{r-1}{2}$ معامل في البسط وأعلى قيمة للقوة المرفوعة فوق المتغير B أي B^T و أن $T=\frac{r+1}{2}$ لذلك نحتاج إلى مصفوفة المعاملات للقوة الفردية r والتي تتكون من صف واحد و $\frac{r-1}{2}$ عمود وهي معاملات البسط لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r ونرمز لها بـ M وكذلك نحتاج إلى مصفوفة التكامل والناتجة من الصيغة رقم 3 وتتكون من $\frac{r-1}{2}$ صف و $\frac{r+1}{2}$ عمود مجموع الصف الأول يعطينا تكامل B^T و مجموع الصف الثاني يعطينا تكامل B^{T-1} وهكذا وصولا إلى أخر صف الذي يعطينا تكامل B^2 وتكون مصفوفة التكامل مثلثيه عليا أي المثلث السفلي قيمهُ أصفار والشكل العام لمصفوفة التكامل هو.

$$\begin{pmatrix} \frac{C}{2(r+2)C} & \frac{-C}{2(r+2)C} & \frac{C}{2(r+2)C} \cdots & \frac{C}{2(r+2)C} \\ 0 & \frac{C}{2(r)C} & \frac{-C}{2(r)C} & \cdots \frac{C}{2(r)C} \\ 0 & 0 & \frac{C}{2(r-2)C} \cdots & \frac{C}{2(r-2)C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \frac{C}{2(3)} \end{pmatrix}$$

ونرمز لمصفوفة التكامل بـ C وعند ضرب المصفوفتين M x C سنحصل على مصفوفة المعاملات للقوة الزوجية r+1 هذا بعد ضرب كل قيمة من قيم المصفوفة الناتجة بـ $\frac{r+1}{m_0}$ علماً بان m_0 هو معامل المقام لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r و سوف تكون حجم المصفوفة الناتجة والتي تتألف من معاملات البسط لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r+1 من صف واحد و $\frac{r+1}{2}$ عمود قيم تلك المصفوفة سوف تكون أعداد غير صحيحة أي تحتوي على كسور عشرية ومن المفروض أن تكون قيم المعاملات أعداد صحيحة ولذلك سوف نستخرج المضاعف المشترك الأصغر لتلك المعاملات والذي سوف يجعل بقية المعاملات أعداد صحيحة حيث سيكون المضاعف المشترك الأصغر هو معامل المقام m_0 .لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r+1.

نلاحظ أن الكسر $\frac{r+1}{m_0}$ قد دخل في صيغ التكامل 3 في الفقرة السابقة بينما لم يدخل في مصفوفة التكامل C في هذهٍ الفقرة وذلك لتوضيح مكونات مصفوفة التكامل حيث قد تم تأجيل عملية الضرب بالكسر $\frac{r+1}{m_0}$ إلى ما بعد ضرب المصفوفتين M x C.وأخيرا نضيف المتغيرين AB^T حيث تكون قيمة $T=\frac{r+1}{2}$ مع المعامل m_1 و قيمة $T=\frac{r-1}{2}$ مع

المعامل m_2 وقيمة $T=\frac{r-3}{2}$ مع المعامل m_3 وصولاً إلى T=1 مع المعامل $m_{r+1/2}$.

عند أجراء التكامل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعة للقوة الزوجية r للحصول على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r+1 وذلك بجعل معاملات الصيغة للقوة الزوجية r في مصفوفة تتكون من صف واحد و $\frac{r}{2}$ عمود أما مصفوفة التكامل فهي مصفوفة قطرية مربعة وبحجم $\frac{r}{2}$ عناصر القطر ناتجة من الصيغة 4 .

$$\left(\frac{2}{r+2}\ \frac{2}{r}\ \frac{2}{r-2}\ \frac{2}{r-4}\ \frac{2}{r-6}\ \cdots\ \frac{2}{4}\right)$$

ونرمز لمصفوفة التكامل بـ C وعند ضرب المصفوفتين M x C سنحصل على مصفوفة المعاملات للقوة الفردية r+1. هذا بعد ضرب كل قيمة من قيم المصفوفة الناتجة بـ $\frac{r+1}{m_0}$ علماً بان m_0 هو معامل المقام لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r و سوف تكون حجم

المصفوفة الناتجة والتي تتألف من معاملات البسط لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r+1 من صف واحد و $\frac{r}{2}$ عمود. قيم تلك المصفوفة سوف تكون أعداد غير صحيحة أي تحتوي على كسور عشرية ومن المفروض أن تكون قيم المعاملات أعداد صحيحة ولذلك سوف نستخرج المضاعف المشترك الأصغر لتلك المعاملات والذي سوف يجعل بقية المعاملات أعداد صحيحة حيث سيكون المضاعف المشترك الأصغر هو معامل المقام m_0.لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r+1. نلاحظ أن الكسر $\frac{r+1}{m_0}$ قد دخل في صيغ التكامل 4 في الفقرة السابقة بينما لم يدخل في مصفوفة التكامل C في هذهِ الفقرة وذلك لتوضيح مكونات مصفوفة التكامل حيث قد تم تأجيل عملية الضرب بالكسر $\frac{r+1}{m_0}$ إلى ما بعد ضرب المصفوفتين M x C.وأخيرا نضيف المتغير B^T حيث تكون قيمة $T=\frac{r+2}{2}$ مع المعامل m_1 وقيمة $T=\frac{r}{2}$ مع المعامل m_2 وقيمة $T=\frac{r-2}{2}$ مع المعامل m_3 وصولاً إلى T=2 مع المعامل $m_{r/2}$.

أما المشتقة لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية والمبينة في الصيغة رقم 5 فهي لا تختلف عن التكامل في الصيغة رقم 4 حيث تكون مصفوفة المشتقة C مصفوفة قطرية مربعة بحجم $\frac{r-1}{2}$ و عناصرها.

$$\left(\frac{r+1}{2}\ \frac{r-1}{2}\ \frac{r-3}{2}\ \frac{r-5}{2}\cdots\ \frac{4}{2}\right)$$

ثم نضرب المصفوفتين M x C.وأخيرا نضيف المتغيرين AB^T حيث تكون قيمة $T=\frac{r-1}{2}$ مع المعامل m_1 وقيمة $T=\frac{r-3}{2}$ مع المعامل m_2 وقيمة $T=\frac{r-5}{2}$ مع المعامل m_3 وصولاً إلى T=1 مع المعامل $m_{r-1/2}$. ومن ثم نقسم قيم المصفوفة الناتجة على $r\,m_0$ علماً بان r عدد فردي و m_0 هو معامل مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الفردية r قبل الاشتقاق وبعد استخراج المضاعف المشترك الأصغر لقيم المصفوفة الناتجة سوف تتضح صورة المعاملات في بسط الصيغة وكذلك معامل المقام m_0 للقوة الزوجية r-1 بعد الاشتقاق.

يوجد بعض التعقيد في مشتقة صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r حيث تكون فيها مصفوفة المشتقة مربعة بحجم $\frac{r}{2}$ ولكنها ليست قطرية كما في مشتقة القوى الفردية و النقطة الأساسية في هذهِ المشتقة هو عند الاشتقاق للحد الأخير أي فقط عندما T=1 سوف تتبدل الصيغة رقم 6 إلى الشكل التالي :

$$\frac{dAB^T}{dn}=\frac{2(2T+1)B^T}{r\,m_0}$$

سوف يبتر الحد الثاني من بسط الصيغة 6 وتصبح مصفوفة المشتقة C على هذا الشكل.

$$\begin{pmatrix} 2r+2 & \frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2r-2 & \frac{r-2}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 6 \end{pmatrix}$$

ثم نضرب المصفوفتين M x C.وعندها تكون أخر قيمة في المصفوفة الناتجة من عملية الضرب صفر وبذلك سوف يصبح حجم مصفوفة المعاملات الناتجة صف واحد و $\frac{r-2}{2}$ عمود وأخيرا نضيف المتغير B^T حيث تكون قيمة $T=\frac{r}{2}$ مع المعامل m_1 و قيمة $T=\frac{r-2}{2}$ مع المعامل m_2 وقيمة $T=\frac{r-4}{2}$ مع المعامل m_3 وصولاً إلى T=2 مع المعامل $m_{r-2/2}$ ثم نقسم قيم المصفوفة الناتجة على $r\,m_0$ علماً بان r عدد زوجي و m_0 هو معامل مجموع الأعداد الطبيعية للقوة الزوجية r قبل الاشتقاق وبعد استخراج المضاعف المشترك الأصغر لقيم المصفوفة الناتجة سوف تتضح صورة المعاملات في بسط الصيغة وكذلك معامل المقام m_0 للقوة الفردية r-1 بعد الاشتقاق.

لقد تم استخدام برنامج Excel في العمليات الحسابية وذلك لإمكانيات هذا البرنامج في التعامل مع الأعداد الصحيحة Long Integer و الأعداد ذات الكسور العشرية بالإضافة إلى بعض الدوال كدالة LCM و MMULT وغيرها.

٥ – الاستنتاجات The deduction

الاستنتاجات الرئيسية التي يمكن ملاحظتها بوضوح هو سلوك الأرقام من حيث كونها أرقام فردية أم زوجية وكما يبدو أن القوة r تؤثر على المتغير A حيث يحجب عند القوى الفردية ويحل محلهُ المتغير B بينما يظهر في القوى الزوجية وعليهِ سيكون هنالك شكلين لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الأول خاص بالقوى الفردية كما مبين في (الجدول رقم 1) والثاني خاص بالقوى الزوجية و كما مبين في (الجدول رقم 2) كذلك استخدام المتغير A=2n+1 والمتغير B=n(n+1) وكلاهما بدلالة المتغير n أدت إلى أيجاد تكامل لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى لم تكن ممكنة مع استخدام المتغير n بصورة مباشرة .

لقد توصل الباحث إلى صيغ أخرى كصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية و كذلك إلى صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الزوجية وفي كلتاهما سيتم التعويض عن القيمة n بأكبر عدد زوجي لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية واكبر عدد فردي لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية و يوجد علاقة قوية بين معاملات ومتغيرات هاتين الصيغتين وبين معاملات و متغيرات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية فعند كل قوة r سوف يكون عدد المعاملات متساوي أما قيم المعاملات فيتم ضرب معاملات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية بالمتوالية الهندسية للأساس 4 أي ضرب المعامل m_1 بـ 4^0 و المعامل m_2 بـ 4^1 و المعامل m_3 بـ 4^2 … الخ للحصول على معاملات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية و الفردية للقوى الزوجية كذلك يجب استبدال المتغيرين A & B وجعلهما A=n+1 & B=n(n+2) بدل A=2n+1 & B=n(n+1) على التوالي.

كذلك توصل الباحث إلى صيغ لمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية و إلى صيغ لمجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية وفي كلتاهما سيتم التعويض عن القيمة n بأكبر عدد زوجي لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية واكبر عدد فردي لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية و يوجد علاقة قوية بين معاملات ومتغير هاتين الصيغتين وبين معاملات و متغير صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية فعند كل قوة r سوف يكون عدد المعاملات متساوي أما قيم المعاملات فيتم ضرب معاملات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية بالمتوالية الهندسية للأساس 4 وقسمتها على 2 أي ضرب المعامل m_1 بـ

و $\frac{4^0}{2}$ المعامل m_2 بـ $\frac{4^1}{2}$ و المعامل m_3 بـ $\frac{4^2}{2}$ ... الخ للحصول على معاملات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية و الفردية للقوى الفردية كذلك يجب استبدال المتغير B وجعلهُ B=n(n+2) بدل B=n(n+1) ويجب إضافة الثابت h إلى بسط صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية و إشارة الثابت عكس إشارة المعامل $m_{r-1/2}$ ويمكن حساب قيمة الثابت h وذلك بطرح بسط الصيغة رقم 1 من المقام عندما n=1 و بالتالي ستصبح B=3 وحسب الصيغة التالية:

$$h = m_0 - \left(m_1 B^{r+1/2} + m_2 B^{r-1/2} + m_3 B^{r-3/2} + \dots + m_{r-1/2} B^2 \right)$$

وصيغة التكامل لكل حد من حدود صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية هي.

$$\int B^T dn = \frac{\sum_{x=1}^{T} (-1)^{x+1} 4^{x-1} C_{(T-x)}^{2(T-x)+1} AB^{(T-x+1)} (r+1)}{(2T+1) C_{(T-1)}^{(2T-1)} m_0}$$

أما صيغة التكامل لكل حد من حدود صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية هي.

$$\int AB^T dn = \frac{B^{(T+1)}(r+1)}{2(T+1) m_0}$$

كما ويمكن أيجاد المشتقة لكل حد من حدود صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية وحسب الصيغة أدناه.

$$\frac{dB^T}{dn} = \frac{2TAB^{T-1}}{r\, m_0}$$

و مشتقة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية بحسب الصيغة التالية:

$$\frac{dAB^T}{dn} = \frac{(2T+1)B^T + 2TB^{T-1}}{r\, m_0}$$

وعلى غرار ما تم عملهُ في الجانب التطبيقي نستطيع تكوين المصفوفة C للتكامل أو للمشتقة وأجراء نفس العمليات الحسابية. ونلاحظ التشابه بين الصيغ الأربعة أعلاه والصيغ رقم 3 و 4 و 5 و6 على التوالي والفرق بينهم هو ضرب أو قسمة كل صيغة على ثابت معين ذات قيمة زوجية.

الجدول رقم 1: صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية

Calculate sums of power 3 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 3 B =n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			8
m1	2	B^2	
Calculate sums of power 5 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 5 B = n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			12
m1	2	B^3	
m2	-1	B^2	
Calculate sums of power 7 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 7 B = n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			48
m1	6	B^4	
m2	-8	B^3	
m3	4	B^2	
Calculate sums of power 9 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 9 B = n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			20
m1	2	B^5	
m2	-5	B^4	
m3	6	B^3	
m4	-3	B^2	
Calculate sums of power 11 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 11 B = n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			24
m1	2	B^6	
m2	-8	B^5	
m3	17	B^4	
m4	-20	B^3	
m5	10	B^2	
Calculate sums of power 13 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 13 B =n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			420
m1	30	B^7	
m2	-175	B^6	
m3	574	B^5	
m4	-1180	B^4	
m5	1382	B^3	
m6	-691	B^2	
Calculate sums of power 15 of natural numbers			
Coefficient of sums of power 15 B = n*(n+1)			
Coefficient	numerator		denominator
m0			96

Calculate sums of power 10 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 10 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		66
m1	3 A*B^5	
m2	-10 A*B^4	
m3	17 A*B^3	
m4	-15 A*B^2	
m5	5 A*B^1	

Calculate sums of power 12 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 12 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		2730
m1	105 A*B^6	
m2	-525 A*B^5	
m3	1435 A*B^4	
m4	-2360 A*B^3	
m5	2073 A*B^2	
m6	-691 A*B^1	

Calculate sums of power 14 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 14 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		90
m1	3 A*B^7	
m2	-21 A*B^6	
m3	84 A*B^5	
m4	-220 A*B^4	
m5	359 A*B^3	
m6	-315 A*B^2	
m7	105 A*B^1	

Calculate sums of power 16 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 16 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		510
m1	15 A* B^8	
m2	-140 A*B^7	
m3	770 A*B^6	
m4	-2930 A*B^5	
m5	7595 A*B^4	
m6	-12370 A*B^3	
m7	10851 A*B^2	
m8	-3617 A*B^1	

Calculate sums of power 18 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 18 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		3990
m1	105 A* B^9	
m2	-1260 A* B^8	
m3	9114 A*B^7	
m4	-47418 A*B^6	
m5	178227 A*B^5	
m6	-460810 A*B^4	
m7	750167 A*B^3	
m8	-658005 A*B^2	
m9	219335 A*B^1	

Reference المصادر

m1	6 B^8	
m2	-48 B^7	
m3	224 B^6	
m4	-704 B^5	
m5	1436 B^4	
m6	-1680 B^3	
m7	840 B^2	

Calculate sums of power 17 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 17 B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		180
m1	10 B^9	
m2	-105 B^8	
m3	660 B^7	
m4	-2930 B^6	
m5	9114 B^5	
m6	-18555 B^4	
m7	21702 B^3	
m8	-10851 B^2	

Calculate sums of power 19 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 19 B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		840
m1	42 B^10	
m2	-560 B^9	
m3	4557 B^8	
m4	-27096 B^7	
m5	118818 B^6	
m6	-368648 B^5	
m7	750167 B^4	
m8	-877340 B^3	
m9	438670 B^2	

الجدول رقم 2: صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية

Calculate sums of power 2 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 2 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		6
m1	1 A*B^1	

Calculate sums of power 4 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 4 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		30
m1	3 A*B^2	
m2	-1 A*B^1	

Calculate sums of power 6 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 6 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		42
m1	3 A*B^3	
m2	-3 A*B^2	
m3	1 A*B^1	

Calculate sums of power 8 of natural numbers		
Coefficient of sums of power 8 A = 2*n+1 , B = n*(n+1)		
Coefficient	numerator	denominator
m0		90
m1	5 A*B^4	
m2	-10 A*B^3	
m3	9 A*B^2	
m4	-3 A*B^1	

1. Anton, H. ; Bivens, I. and Davis, S.**2002**; "Calculus". Seventh Edition. New York. John Wiley & Sons.
2. Baugh, R.J. **2009**; "Discrete Mathematics". New Jersey. Pearson Prentice hall.
3. Edward, C.H. and Penney, D.E. **2008**; "Differential Equation Computing and Modeling". Fourth Edition. New Jersey. Pearson Prentice hall.
4. Garnier, R. and Taylor, J. **2002** ;"Discrete Mathematics for New Technology". second Edition. London. Institute of Physics Publishing.
5. Gathen, J. V. Z. and J. G.**1999**.; "Modern Computer Algebra" . United Kingdom . Cambridge University Press .
6. Gilbert , W. J. and Nicholson ,W. K. **2004**; " Modern Algebra With Applications " . Second Edition . New Jersey . John Wiley & Sons .
7. Grattan-Guinness, I. **2005**; "Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940". New York. ELSEVIER.
8. Houpis, C.H. ; D'Azzo, J.J. and Sheldon, S.N. **2003**; "Linear Control System Analysis and Design with Matlab". Fifth Edition. New York. Marcel Dekker, Inc.
9. Merris, R. **2003;** "Combinatorics". Second Edition. New York. John Wiley & Sons.
10. Rosen, H.K. ; Michaels, J.G.; Gross, J.L.; Grossman , J.W. and Shier, D.R. **2000**; "Discrete And Combinatorial Mathematics". New York. CPC press.
11. Shoup, V. **2005**; "A Computational Introduction to Number Theory and Algebra". London. Cambridge University Press.
12. Villegas, F.R. **2007**; "Experimental Number Theory". London. Oxford University Press.
13. Weil, A. **1974** ;"Basic Number Theory". Third Edition. New York. Springer-Verlag.